

7. cvičení - Lineární algebra 1

 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

$\mathcal{P}$ = množina všech reálných polynomů, $M(m \times n)$ = množina všech reálných matice typu $m \times n$

Příklad 1. Rozhodněte zda se jedná o vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

- (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ spojitá}\}$ s operacemi sčítání po složkách a násobení reálným číslem po složkách.
- (b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ s operacemi sčítání po složkách a násobení komplexním číslem po složkách.
- (c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{R}^2$ s operacemi sčítání po složkách a násobení komplexním číslem po složkách.
- (d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ polynom splňující } p(0) = 0\}$ s operacemi sčítání po složkách a násobení reálným číslem po složkách.
- (e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$ s operacemi sčítání po složkách a násobení reálným číslem po složkách.
- (f)  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{Q}$ s kanonicky definovanými operacemi sčítání a násobení.
- (g)  $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$ s kanonicky definovanými operacemi sčítání a násobení.

Příklad 2. Rozhodněte zda W je podprostor vektorového prostoru X .

- (a) $X = \mathbb{R}^3$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, z = 0\}$
- (b) $X = \mathbb{R}^3$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 1\}$
- (c)  $X = \mathcal{C}([0, 1])$ $W = \left\{f \in X; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right\}$
- (d)  $X = \mathbb{R}^2$ $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$
- (e) $X = \mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ $W = \mathbb{R}$
- (f) $X = \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$ $W = \mathbb{R}$
- (g)  $X = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ polynomy}\} = \mathcal{P}$ $W = \{p \in \mathcal{P}; p \leq 4\}$
- (h) $X = M(n \times n)$ $W = \{A \in X : A \cdot (1, 1, \dots, 1) = \vec{0}\}$
- (i) $X = M(n \times n)$ $W = \left\{A \in X : \text{Trace}(A) = \sum_{i=0}^n a_{ii} = 0\right\}$
- (j) $X = \mathcal{P}$ $W = \{p \in X : p'(0) = 0\}$

Pokračování na další straně



Příklad 3. Rozhodněte zda následující vektory jsou lineárně nezávislé.

- (a) $(2, 0, 1), (0, 2, 3), (1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$
- (b) $\sin x, \cos x, x \in \mathcal{C}([0, 1])$
- (c) $i, i + 1 \in \mathbb{C} \text{ nad } \mathbb{C}$
- (d) $i, i + 1 \in \mathbb{C} \text{ nad } \mathbb{R}$
- (e) $(1, 1), (3, 2), (1, 5) \in \mathbb{R}^2$
- (f) $(1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8), (3, 6, 9, 13) \in \mathbb{R}^4$

Příklad 4.

Nalezněte nějakou bázi prostoru V a určete jeho dimenzi.

- (a) $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 1), (2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$
- (b) $V = \mathbb{C}^2 \text{ nad } \mathbb{R}$
- (c) $V = M(2 \times 3)$
- (d) $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{x, x^2 + x, x^2 - x + 1, 2 + x\} \subset \mathcal{P}$
- (e) $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 2, 3, -1), (2, 3, 9, 10), (2, -1, 1, -2)\} \subset \mathbb{R}^4$
- (f) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- (g) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$
- (h) $V = \{p \in \mathcal{P} : p^{(3)} = 0\} \subset \mathcal{P}$
- (i) $V = \{p \in \mathcal{P} : p^{(n)} = 0\} \subset \mathcal{P}, \quad n \in \mathbb{N}$
- (j) $V = \mathcal{P}$
- (k) $V = \{\text{posloupnost reálných čísel}\}$, kde sčítání vektorů a násobení skalárem je definováno po složkách.

